# 14. Stable distribution ヲ持ツ Markoff process ニ関スル一定理ニツイテ

阪大　吉田耕作
(1946. XI. 28 受付)

角谷サンガ Princeton ニ居ラレタ頃，吉田サンへノ手紙ノ中ニ次ノコトガ述ベラレテヰル。

「Measure space $(\Omega, \mathfrak{L}, m)$ ノ上ノ $L^2$ space $L^2(\Omega)$ ヲ考ヘ、コヽデ measure preserving transformation $S$ ヲ unitary operator $U_S$ ト考ヘル

$(f(x) \in L^2 \to g = U_S(f) \quad g(x) = f(Sx) \quad x \in \Omega)$

サウスルト measure preserving transformations 全体ノ作ル group $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ナル unitary transformations ノ group ガ correspond スルガ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ハ $L^2(\Omega)$ ノアラユル bounded linear operators ノ作ル ring $\mathfrak{R}$ ノ中デ (operator space ノ) strong topology ニ関シテ閉ヂテヰルガ、weak topology ニ関シテハ閉ヂテヰナイ

実ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ノ $\mathfrak{R}$ 内ニ於ケル weak limit 全体ハ、stable distribution $m(E)$ ヲ持ツ Markoff process $p(x, E)$ (即チ $\int_\Omega p(x, E)\, m(dx) = m(E)$) ニヨッテ与ヘラレル bounded linear operator $T$ ($f \to T(f) = g$, $g(x) = \int p(x, dy) f(y) \quad x, y \in \Omega$) 全体ト一致スル」

ソノ証明ヲ書カセテ戴クハ

コノ前ニ $(\Omega, \mathfrak{L}, m)$ ハ atomic elements ヲ持タズ separable デ且ツ、$m(\Omega) = 1$ ナル條件ガツイテヰルコトヲ注意スル separable トイフ $\mathfrak{L}$ ニ属スル countable set sequence $A_1, A_2, \dots, A_n$ ガ存在シテ、任意ノ $B \in \mathfrak{L}$ ト $\varepsilon > 0$ ニ対シ $A_n$ ガ存在シテ $m(B \ominus A_n) < \varepsilon$ トナルコトデアル

§1 $f \to T(f) = \int p(x, dy) f(y)$ トスル コヽニ

$$\int p(x, E)\, m(dx) = m(E)$$

operator $T$ ガ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ノ weak limit デアルコトヲ証明スル

先ヅ $T$ ハ bounded operator デアル

$$\int \left| \int p(x, dy) f(y) \right|^2 m(dx) \leq \int \left\{ \int |f(y)|^2 p(x, dy) \right\} m(dx)$$
$$= \int |f(y)|^2 \int p(x, dy)\, m(dx) = \int |f(y)|^2 m(dy)$$
$$\|T\| \leq 1$$

任意ノ $\varepsilon > 0$ ト、任意ノ $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_p \in L^2(\Omega)$, $p = 1, 2, \dots$ ニ対シ

$|(Tf_i, g_i) - (U_S f_i, g_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, p$ ヲ満足スル

$P \in \mathcal{G}$ ガ存在スルコトヲ示セバヨイ
T及ビ $U_g$ ニ属スル operator ノ norm ガ 1 ヲ超サナイコト及ビ $f$ ト $g_i$ $i=1,2\cdots p$ ノ characteristic functions ノ linear combination デイクラデモ近似出来ルコトニ注意スレバ、$\Omega$ ヲ次ノ如クニ適当ニ有限個ノ disjoint ナ集合ノ和トシテ差シ支ナイ

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \qquad A_i \cap A_j = \theta \quad (i \neq j)$$
$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \qquad B_i \cap B_j = \theta \quad (i \neq j)$$
$$(T\varphi_{A_j},\ \varphi_{B_i}) = (U_S\varphi_{A_j},\ \varphi_{B_i}) \qquad j=1,2,\cdots m,\ i=1,2,\cdots n$$

ヲ満足スル $S \in \mathcal{G}$ ノ存在スルコトヲ示セバ充分デアル
コヽニ $\varphi_A$ ハ set $A$ ノ characteristic function ヲ表ス。

$$\alpha_{ij} \overset{\text{def}}{=} \int_{B_i} p(x, A_j)\, m(dx) \quad ハ$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} = \int_{B_i} \sum_{j=1}^{m} p(x, A_j)\, m(dx) = m(B_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = \int_{\Omega} p(x, A_j)\, m(dx) = m(A_j)$$

次ニ各 $B_i$ ヲ次ノヤウニ分割スル

$$B_i = A_{i1}^* \cup A_{i2}^* \cup \cdots \cup A_{im}^* \qquad A_{ip}^* \cap A_{iq}^* = \theta$$
$$m(A_{ip}^*) = \alpha_{ip} \qquad p = 1, 2, \cdots m \qquad (p \neq q)$$
$$A_j^* = A_{1j}^* \cup A_{2j}^* \cup \cdots \cup A_{nj}^* \qquad j = 1, 2, \cdots m \quad ハ$$

互ニ disjoint デ $\Omega = A_1^* \cup A_2^* \cup \cdots \cup A_m^*$

$$m(A_j^*) = \sum_{i=1}^{n} m(A_{ij}^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = m(A_j) \quad デアルカラ$$

$A_i^* = S(A_j)$ $\quad j = 1, 2, \cdots m$ ナル $S \in \mathcal{G}$ ガ存在スル

$$\begin{aligned}
&(T\varphi_{A_j},\ \varphi_{B_i}) - (U_S\varphi_{A_j},\ \varphi_{B_i}) \\
&= \int \left\{ \int p(x, dy)\, \varphi_{A_j}(y) \right\} \varphi_{B_i}(x)\, m(dx) \\
&\qquad - \int \varphi_{SA_j}(x)\, \varphi_{B_i}(x)\, m(dx) \\
&= \int_{B_i} p(x, A_j)\, m(dx) - m(SA_j \cap B_i) \\
&= \alpha_{ij} - m(A_{ij}^*) = 0
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \cdots n, \quad j = 1, 2, \cdots m$$

§2. T ヲ $U_g$ ノ weak limit トスル。T ハ stable distribution ヲ持ツ Markoff operator デアルコトカラ明カ

（$\cdots = f_A(x)$ ）ト置ク　$A \in \mathfrak{L}$ ヲ与ヘタ
ノ $B \in \mathfrak{L}$ ト $\varepsilon > 0$ ニ対　$S' \in \mathfrak{G}$ ガ存在
シテ，$|(T\varphi_A, \varphi_B) - (U_{S'}\varphi_A, \varphi_B)|$
$= |(T\varphi_A, \varphi_B) - m(S'(A) \cap B)| < \varepsilon$ ……　(1) ヲ
満足スルカラ，直ニ次ノコトガ分ル

(2)　$1 \geqq f_A(x) \geqq 0$,　for almost all $x$

(3)　$f_\Omega(x) = 1$　for almost all $x$

T ノ linearity カラ

(4)　$A \cap B = \theta \longrightarrow f_A(x) + f_B(x) = f_{A \cup B}(x)$
for almost all $x$

T ガ bounded linear operator デアルカラ

(5)　$A_m \in \mathfrak{L}$　$(m = 1, 2, \cdots)$
$A_m \cap A_n = \theta \quad (m \neq n)$ & $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$
$\longrightarrow f_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}(x)$　for almost all $x$

(ii) $(\Omega, \mathfrak{L}, m)$ ノ separability カラ，countable set sequence $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathfrak{L}$ ガ存在シテ此等ノ集合ヲ含ム最小ノ Borel field ヲ $\mathfrak{L}'$ トスルト任意ノ $B \in \mathfrak{L}$ ニ対シテ $B' \in \mathfrak{L}'$ ヲ見付ケテ $m(B \ominus B') = 0$ ト出来ルコトガ分ル　$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ ヲ含ム最小ノ set field ヲ $\mathfrak{A}$ トスル。

(iii) ニ於テ次ノ事ヲ証明スル「null set $N$ ガ存在シテ，スベテノ $x \notin N$ ニ対シテ $\mathfrak{L}'$ ノ集合ニ対シテ定義セラレタ countably additive measure $\mu(x, A)$ ノ family ガ存在シテ任意ノ $A \in \mathfrak{L}'$ ニ対シ，(6)　$f_A(x) = \mu(x, A)$　for almost all $x$
ガ成立スル」

任意ノ $f(x) \in L^2(\Omega)$ ニ対シテ　$m\{x \mid f(x) \neq f^*(x)\} = 0$ ヲ満足スル $\mathfrak{L}'$-measurable ナ函数 $f^*(x)$ ヲ見ツケルコトガ出来ル

$R(f) = \int \mu(x, dy) f^*(y)$ ニヨツテ bounded linear operator $R$ ガ unique ニ定マル

任意ノ集合 $A$ ニ対シ，$m(A \ominus A') = 0$, $A' \in \mathfrak{L}'$

$T(f_A(x)) = f_A$ [illegible] $(x) \doteq p(x, A')$ 殆ンド
スベテノ $x$ ニツイテ成立スルカラ、
$$T\varphi_A = R\varphi_A$$ ガ成立スル。従ッテ、
スベテノ $f(x) \in L^2(\Omega)$ ニ対シ、
$$Tf = Rf$$ トナル

$p(x, A)$ ガ stable distribution デアルコトヲ見ルニハ、(1) ニ於テ $B = \Omega$ ト置ケバヨイ。

$$\left|\int p(x, A)\, m(dx) - m(A)\right| = \left|\int f_A(x)\, m(dx) - m(S(A))\right| < \varepsilon$$
$$\rightarrow \int p(x, A)\, m(dx) = m(A)$$

(iii) 次ニ 0 ト 1 ノ間ノ dyadic rational numbers 全体ノ集リヲ $\Delta$ トスル $r \in \Delta$ ヲ parameter トスル set sequence $E_r$ ヲ次ノ様ニ選ブ。

(7.1) $E_r \in \mathfrak{A}$ $\quad r < s \rightarrow E_r \subseteq E_s$

(7.2) $E_r$ ヲ含ム最小ノ set field ハ $\mathfrak{A}$ ト一致スル 従ッテ最小ノ Borel field ハ $\mathfrak{L}'$ ト一致スル

ソレニハ $E_1 = \Omega$, $E_{\frac{1}{2}} = A_1$, $E_{\frac{1}{4}} = A_1 \cap A_2$
$E_{\frac{3}{4}} = A_1 \cup A_2$ 一般ニ $E_{\frac{m}{2^n}}$ $m = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$ ガ $A_1, A_2, \cdots A_n$ ヲ使ッテ定義セラレタトシテ、
$E_{\frac{m}{2^{n+1}}}$, $m = 1, 2, \cdots, 2^{n+1} - 1$ ヲ順次次ノ様ニ決メテ行ケバヨイ。

$$E_{\frac{1}{2^{n+1}}} = E_{\frac{1}{2^n}} \cap A_{n+1},$$

$$E_{\frac{3}{2^{n+1}}} = E_{\frac{1}{2^n}} \cup \left(E_{\frac{2}{2^n}} \cap A_{n+1}\right)$$

$$-----------$$

$$E_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = E_{\frac{k}{2^n}} \cup \left(E_{\frac{k+1}{2^n}} \cap A_{n+1}\right) \quad ------ \text{ト}$$

$\mathfrak{A}$ ノ elements ハ countable デアルカラ、(2), (3), (4) ヨリ null set $N_0$ ヲ見付ケテ、$N_0 \not\ni x$ ニ対シテハ

(8.1) $A$ $B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = 0$
$f_{A \cup B}(x)$

(8.2) $A\in\mathfrak{A}$ ナラ $f_A(x)\geqq 0$

(8.3) $f_\Omega(x)=1$

(8.4) $A,\ B\in\mathfrak{A}$ $A\subseteq B\to f_A(x)\leq f_B(x)$

ガ成立スルヤウニ出来ル。

即チ $N_0\not\ni x$ ニ対シテ $f_{E_r}(x)=\varphi(x,r)$ ト置ケバ

(9.1) $\varphi(x,r)\leqq\varphi(x,s)$

$\forall\ r\leq s,\ r,s\in\Delta$

(9.2) $\varphi(x,r)\geqq 0$

(9.3) $\varphi(x,1)=1$

(9.4) $\lim\limits_{r\to 0}\varphi(x,r)=0$ $(\Omega,\mathfrak{L},m)$ ガ atomic element ヲ持タナイカラ

$x\notin N_0$ ト 0ト1ノ間ノ実数 $\alpha$ ニ対シテ $\Phi(x,\alpha)$ ヲ

$\Phi(x,\alpha)=\lim\limits_{\substack{r\to\alpha\\ r\geqq\alpha}}\varphi(x,r)$ デ定義スル

$r\in\Delta$ ニ対シテハ, $\Phi(x,r)=\varphi(x,r)$

$\Phi(x,\alpha)$ ハ $\alpha\notin\Delta$ ニ於テハ, 上カラ連続ナルコトハ定義カラ明デアルガ, $\alpha\in\Delta$ ニ於テハ, (5)ヨリ $r\downarrow\alpha$ ナルトキ, $f_{E_\alpha}(x)=\lim\limits_{\substack{r\to\alpha\\ r>\alpha}}f_{E_r}(x)$ ガ殆ンドスベテノ $x$ ニ対シテ成立スルコトガ分ル

$\Delta$ ハ countable デアルカラ null set $N\supseteq N_0$ ガ存在シテ, $x\notin N$ ニ対シテハ, $\Phi(x,\alpha)$ ハ $\alpha$ ニ関シテ, 上カラ連続ナ函数ニナリ, 従ッテ(9)ノ諸條件ト具合ハセルト, $\Phi(x,\alpha)$ ハ, $x\notin N$ ニ対シテハ $0\leqq\alpha\leqq 1$ ノ distribution function デアル

従ッテ, $N\not\ni x$ ニ対シテ, $f_A(x)=\mu(x,A)$ ト置ケバ (8)ノ諸條件ヨリ $\mu(x,A)$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ集合ニ対シテ定義セラレタ finitely additive measure ニナッテヰルコトガ分ルガ, $\Phi(x,\alpha)$ ガ distribution function ニナッテヰルコトニ注意スレバ $x\notin N$ ニ対シテハ, $\mu(x,A)$ ハ $\mathfrak{A}$ 内デ countably additive measure トナリ, ヨッテ $\mathfrak{L}'$ ノ集合ニ対シテ定義セラ

レル countably additive measure ニ拡張出来ル。

ソノ measure $\mu(x, B')$, $B' \in \mathfrak{B}$ ヲ考ヘル。

$f(x, B') = \mu(x, B')$ for almost all $x$ ガ成立スルヤウナ $B' \in \mathfrak{B}'$ ノ全体ノ集リヲ考ヘルト，ソノ集合族ハ $\mathfrak{A}$ ヲ含ミ，且ツ normal class ヲ作ルカラ，ソレハ $\mathfrak{B}'$ ニ一致シナケレバナラナイ。故ニ任意ノ $B' \in \mathfrak{B}'$ ニ対シ

$$(6) \quad f(x, B') = \mu(x, B')$$

for almost all $x$ ガ成立スル